**Taikomoji Matematika**

**Namų Darbas Nr. 2**

**var. 13**

**Optimizavimo metodai**

Atliko: Tautvydas Petkus IF-1/9

Dėstytojas: Artūras Katvickis

**1 užduotis.** Vieno kintamojo funkcijų minimizavimas (tikslumas ne mažiau kaip 10-4).

1. Bisekcijos metodu rasti funkcijos f(x) minimumo tašką atkarpoje [a; b];

Matlabu parašiau ciklą, kuris man suskaičiuotų reikalingas reikšmes bisekcijos metodu:

>> a = 1;

>> b = 3;

>> eile = 0;

>> while (a ~=b)

eile = eile + 1

f = inline('x.^4 + 5 \* x.^3 - 4 \* x.^2 - 44 \* x - 48')

X = [a; (3 \* a + b) / 4; (a + b) / 2; (a + 3 \* b) / 4; b]

F = f(X)

k = find(F == min(F))

a = X(k - 1)

b = X(k + 1)

end;

Rezultatai:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos Nr.** | **[a;b]** |  |  |
| 1. | [1;3] | 1.5 | -101.0625 |
| 2. | [1;2] | 1.7 | -101.0742 |
| 3. | [1.5;2] | 1.625 | -101.6345 |
| 4. | [1.5;1.75] | 1.625 | -101.6345 |
| 5. | [1.5625; 1.6875] | 1.625 | -101.6345 |
| ... | ... | ... | ... |
| 15. | [1.6281; 1.6281] | 1.6281 | -101.6349 |

1. Auksinio pjūvio metodu rasti funkcijos f(x) minimumo tašką atkarpoje [a; b];

Matlabu parašiau ciklą, kuris man suskaičiuotų reikalingas reikšmes auksinio pjūvio metodu:

>> a = 1;

>> b = 3;

>> eile = 0;

>> while (a ~=b)

eile = eile + 1

f = inline('x.^4 + 5 \* x.^3 - 4 \* x.^2 - 44 \* x - 48')

C = (sqrt(5)-1)/2;

X = [a; a + (1 - C) \* (b - a); a + C\*(b - a); b]

F = f(X)

k = find(F == min(F))

a = X(k - 1)

b = X(k + 1)

end;

Rezultatai:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos Nr.** | **[a;b]** |  |  |
| 1. | [1;3] | 1.7639 | -100.9357 |
| 2. | [1; 2.2361] | 1.7639 | -100.9357 |
| 3. | [1.4721; 2.2361] | 1.7639 | -100.9357 |
| 4. | [1.4721; 1.9443] | 1.6525 | -101.6132 |
| 5. | [1.4721; 1.7639] | 1.6525 | -101.6132 |
| ... | ... | ... | ... |
| 22. | [1.6281; 1.6281] | 1.6281 | -101.6349 |

1. Niutono metodu rasti funkcijos f(x) minimumo tašką nuo pradinio artinio x0 = b

Matlabu parašiau ciklą, kuris man suskaičiuotų reikalingas reikšmes niutono metodu:

>> syms x

>> f = x ^ 4 + 5 \* x^3 - 4 \* x^2 - 44 \* x - 48;

>> f1 = diff(f);

>> syms x

>> f = x ^ 4 + 5 \* x^3 - 4 \* x^2 - 44 \* x - 48;

>> x = 0;

>> f1 = diff(f);

>> f2 = diff(f, 2);

>> i = 1;

>> while (i<30)

f1x = double(subs(f1))

f2x = double(subs(f2))

x = x - f1x/f2x

i=i+1

end;

Gaunu 30 reikšmių, tačiau išsirenku tik tas, kurios atitinka salygą (|f1x| > 10-5 ).

Rezultatai:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos Nr.** |  |  |  |
| 1. | 0 | -44 | -8 |
| 2. | -5.5 | -211.7500 | 190 |
| 3. | -4.3855 | -57.8077 | 91.2283 |
| 4. | -3.7519 | -14.0902 | 48.3620 |
| 5. | -3.4605 | -2.4495 | 31.8867 |
| 6. | -3.3837 | -0.1547 | 27.8821 |
| 7. | -3.3782 | -7.8773 \* 10-4 | 27.5984 |

1. Patikrinti pakankamą ir būtiną minimumo salygą.

7 bandymu:

Būtina sąlyga: f’(x) = 0

f’(x) = 4x3 + 15x2 + 8x – 44

f‘(-3.3782) = -7.8773 \* 10-4

Būtina sąlyga netenkinama, tačiau reikšmė yra artima nuliui Pakankama sąlyga:

f’(x) = 0 ir f’’(x) > 0

f’’(x) = 12x2 + 30x + 8

f’’(-3.3782) = 27.5984 > 0

Būtina ir pakankama minimumo sąlyga: f1x = 0 ir f2x > 0;

Antroji išvestinė teigiama, taigi taškas yra minimumo aplinkoje.

**2a užduotis.** Įvykdyti minimumo paiešką gradientinio nusileidimo metodu funkcijai f(x,y) = 3x3 + x2y + xy2 + y3  - 90x – 70y nuo pradinio taško (x0, y0) = (9, 9).

Pasirenkame žingsnio parametrą h = 0,001. Surandame tikslo funkcijos gradiento išraišką, pasirašome matlab funkciją.

∂f/∂x = 9x2 + 2xy + y2 – 90

∂f/∂y = x2 + 2xy + 3y2 - 70

>>syms x y

>>h = 0.001;

>>f= 3 \* x^3 + x^2 \* y + x \* y^2 + y^3 - 90 \* x - 70 \* y;

>>fx=simplify(diff(f,x));

>>fy=simplify(diff(f,y));

>>gradientas=[fx, fy];

>>x\_pr = [9, 9];

>>X(1,:) = x\_pr;

>>for i = 2:100

gr = subs(gradientas,{x,y},x\_pr)

x\_pr = x\_pr-h\*gr

duom =[i, gr, x\_pr]

X(i,:) = x\_pr;

if i>1 && abs(X(i,1)-X(i-1,1))<0.00001

break;

end;

end

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos nr.** | **Esamas taškas** | **Gradiento reikšmė** | **Naujas artinys** |
| 1 | (9, 9) | (882 ; 416) | (8.1180 ; 8.5840) |
| 2 | (8.1180 ; 8.5840) | (716.1722 ; 356.3269) | (7.4018 ; 8.2277) |
| 3 | (7.4018 ; 8.2277) | (592.5777 ; 309.6705) | (6.8093 ; 7.9180) |
| paskutinė | (2.4025 ; 4.2169) | (-0.0074 ; 9.3808) | (2.4025 ; 4.2075) |

**2b užduotis.** Įvykdyti minimumo paiešką greičiausio nusileidimo metodu funkcijai f(x,y) = 3x3 + x2y + xy2 + y3  - 90x – 70y nuo pradinio taško (x0, y0) = (9, 9).

∂f/∂x = 9x2 + 2xy + y2 – 90

∂f/∂y = x2 + 2xy + 3y2 - 70

>> syms x y

>> format short

>> f = 3 \* x^3 + x^2 \* y + x \* y^2 + y^3 - 90 \* x - 70 \* y;

>> fx = simplify(diff(f, x));

>> fy = simplify(diff(f, y));

>> gradientas=[fx, fy];

>> x\_pr = [9, 9];

>> X(1, :) = x\_pr;

>> for i = 2:100

gr = subs(gradientas,{x,y},x\_pr)

syms g

fg = expand(subs(f, {x, y}, x\_pr - g\*gr))

fgg = diff (fg, g)

h0 = double(solve(fgg))

h0 = real(min(h0(find(h0(find(abs(imag(h0))<0.000001))>0))))

x\_pr = x\_pr-h0\*gr

duom =[i, gr, x\_pr, h0]

X(i,:) = x\_pr

if i>1 && abs(X(i,1)-X(i-1,1))<0.00001

break

end;

end

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos nr.** | **Esamas taškas** | **Gradiento reikšmė** | **Žingsnio parametro rekšmė** | **Naujas artinys** |
| 1 | (9, 9) | (882; 416) | 0.0084 | (1.5920; 5.5060) |
| 2 | (1.5920; 5.5060) | (-19.3437; 41.0124) | 0.0415 | (2.3956; 3.8021) |
| 3 | (2.3956; 3.8544) | (-5.6757; -2.6770) | 0.0175 | (2.4952; 3.8490) |
| paskutinė | (2.4928;0,0098) | (0.0815; -0.1728) | 0.0439 | (2.4928; 3.8544) |

**2c užduotis.** Įvykdyti minimumo paiešką Niutono metodu funkcijai f(x,y) = 3x3 + x2y + xy2 + y3  - 90x – 70y nuo pradinio taško (x0, y0) = (9, 9).

>> syms x y

>> f = 3 \* x^3 + x^2 \* y + x \* y^2 + y^3 - 90 \* x - 70 \* y;

>> fx = simplify(diff(f, x));

>> fy = simplify(diff(f, y));

>> fxx = simplify(diff(fx, x));

>> fyy = simplify(diff(fy, y));

>> fxy = simplify(diff(fy, x));

>> gradientas = [fx, fy]

gradientas =

[ 9\*x^2 + 2\*x\*y + y^2 - 90, x^2 + 2\*x\*y + 3\*y^2 - 70]

>> hesse = [fxx, fxy; fxy, fyy]

hesse =

[ 18\*x + 2\*y, 2\*x + 2\*y]

[ 2\*x + 2\*y, 2\*x + 6\*y]

>> x\_pr = [9, 9]

x\_pr =

9 9

>> for i = 2:100

gr = subs(gradientas,{x,y},x\_pr);

H1 = inv(subs(hesse,{x,y},x\_pr))

x\_pr = x\_pr - gr\*H1;

duom = [i, gr, x\_pr]

X(i,:) = x\_pr;

if i>1 && abs(X(i,1)-X(i-1,1))<0.0001

break;

end;

end

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Iteracijos nr.** | **Esamas taškas** | **Gradiento reikšmė** | **Hesse matricos atvirkštinė** | **Naujas artinys** |
| 1 | (9, 9) | (882; 416) | 0.0062 -0.0031  -0.0031 0.0154 | (4.8395 ; 5.3025) |
| 2 | (4.8395 ; 5.3025) | (200.2262 ; 89.0920) | 0.0114 -0.0056  -0.0056 0.0268 | (3.0551 ; 4.0277) |
| 3 | (3.0551 ; 4.0277) | (34.8327 ; 12.6092) | 0.0177 -0.0083  -0.0083 0.0369 | (2.5422 ; 3.8511) |
| paskutinė | (2.4928 ; 3.8544) | (0.1607 0.0127) | 0.0213 -0.0096  -0.0096 0.0399 | (2.4928 ; 3.8544) |

**2d užduotis.** Patikrinti būtina ir pakankama minimumo sąlygas funkcijai f(x,y) = 3x3 + x2y + xy2 + y3  - 90x – 70y taške (xmin, ymin) = (2.4928 ; 3.8544)

Būtina sąlyga: Grad(xmin) =0

>> syms x y

f=3 \* x^3 + x^2 \* y + x \* y^2 + y^3 - 90 \* x - 70 \* y;

fx = simplify(diff(f, x));

fy = simplify(diff(f, y));

gradientas = [fx, fy];

x\_min = [2.4928 , 3.8544];

gr = subs(gradientas, {x, y}, x\_min)

gr =

1.0e-003 \*

-0.6374 -0.2534

Būtina sąlyga netenkinama, tačiau grad artėja link 0, tikrinam pakankamą sąlygą

Pakankama sąlyga: grad(xmin) = 0 ir H(xmin) yra teigiamai apibrėžta.

>> fxx = simplify(diff(fx, x));

>>fyy = simplify(diff(fy, y));

>>fxy = simplify(diff(fy, x));

>>hesse = [fxx, fxy; fxy, fyy];

>>H = subs(hesse, {x, y}, x\_min)

H =

52.5792 12.6944

12.6944 28.1120

>>det(H)

ans =

1.3170e+003

Sąlyga tenkinama.